

Examen escrito CERA modulo A

**Métodos cuantitativos de la Gestión de Riesgos
Empresariales (GRE o ERM)**

de acuerdo con el reglamento de examen nro. 2.1
de la Deutschen Aktuarvereinigung e. V.
para la obtención de la certificación CERA

24 de Mayo de 2022

Por favor, tenga en cuenta:

- Se permite el uso de una calculadora.
- La puntuación máxima es de 180 puntos. El examen se aprueba si la puntuación total es de al menos 90 puntos.
- El examen tiene 11 páginas. Por favor, compruebe que no falte ninguna.
- Todas las respuestas deben estar justificadas. Para las tareas de cálculo se requiere plantear la solución.
- Por favor, introduzca sus respuestas sólo en las hojas designadas para ello.

Miembros del tribunal:

Prof. Dr. R. Frey, Prof. Dr. J. Wolf

Pregunta 1. Medidas de riesgo y riesgo paramétrico. [30 puntos]

Supongamos que el parámetro aleatorio Θ sigue la distribución exponencial con parámetro $\beta > 0$, por ejemplo tiene la densidad $\pi(\theta) = \beta \cdot \exp(-\beta\theta) \cdot 1_{(0,\infty)}(\theta)$. Asíumase la hipótesis de que, dado el valor θ of Θ , la variable pérdida X tiene la densidad

$$f(x|\theta) = \frac{\theta}{2\sqrt{x}} \exp(-\theta\sqrt{x}) \cdot 1_{(0,\infty)}(x)$$

y así, la función de distribución es $F(x|\theta) = 1 - \exp(-\theta\sqrt{x})$, $x \geq 0$.

- (a) [8 puntos] Sea $\alpha \in (0, 1)$. Determinar las medidas de riesgo Valor en Riesgo $\text{VaR}_\alpha(X|\Theta = \theta)$ y Déficit Esperado $\text{ES}_\alpha(X|\Theta = \theta)$ de la distribución condicional de X , dado el valor θ del parámetro.

Pista. $\int (\ln(z))^2 dz = z(\ln(z))^2 - 2z \ln(z) + 2z$

- (b) [8 points] Determine la densidad a posteriori de Θ , dada la observación $x_1 \in \mathbb{R}^+$ de X así como la densidad marginal de X .

Pista . La distribución Gamma con parámetros $\alpha, b > 0$ tiene la densidad

$$\pi(\theta) = \frac{b^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot \theta^{\alpha-1} \cdot \exp(-b\theta) \cdot 1_{(0,\infty)}(\theta)$$

y se cumple que $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$.

- (c) [14 points] Por recurrencia, el resultado correcto de la parte b) da lugar a la siguiente función de distribución acumulativa de X , dadas las observaciones $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^+$:

$$F(x | x_1, x_2, \dots, x_n) = 1 - \left(\frac{\beta + \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}}{\beta + \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i} + \sqrt{x}} \right)^{1+n}, \quad x \geq 0.$$

El valor esperado de esta distribución predictiva viene dado por $\mathbb{E}(X|x_1, \dots, x_n) = \frac{n+1}{\beta + \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}}$.

- (i) [2 puntos] Comprobar que el Valor en Riesgo $\text{VaR}_\alpha^{(n)}$ de la distribución predictiva de $X | x_1, x_2, \dots, x_n$ al nivel de confianza $\alpha \in (0, 1)$, viene dado por

$$\text{VaR}_\alpha(X | x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{\beta + \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}}{(1-\alpha)^{\frac{1}{n+1}}} - \beta - \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i} \right)^2.$$

- (ii) [6 puntos] Cuantificar el riesgo de parámetro en el que se incurre cuando el Valor en Riesgo es estimado usando el estimador de la máxima-verosimilitud basado en las observaciones $x_1, x_2, \dots, x_n$.

(iii) [6 puntos] Analizando el comportamiento asintótico cuando $n \rightarrow \infty$ se observan los resultados siguientes:

- La varianza a posteriori de la distribución de Θ , dado $x_1, \dots, x_n$, converge a 0.
- El valor esperado de la distribución a posteriori de Θ , dado $x_1, \dots, x_n$, converge a $\frac{1}{\mathbb{E}(\sqrt{X})}$.
- Se cumple que $\lim_{n \rightarrow \infty} VaR_{\alpha}^{(n)} = \left(\frac{1}{\mathbb{E}(\sqrt{X})} \cdot \ln(1 - \alpha) \right)^2$.

Explique estos resultados asintóticos. Para ello indique qué medida de riesgo de qué variable toma el valor límite de

$$\left(\frac{1}{\mathbb{E}(\sqrt{X})} \cdot \ln(1 - \alpha) \right)^2.$$

Pregunta 2. Medidas de Riesgo y Teoría de los Valores Extremos. [23 puntos]

Asuma la hipótesis de que la cuantía del siniestro X tiene la distribución de probabilidad

$$F_{a,b}(x) = 1 - \left(1 + \frac{ax}{b}\right)^{-\frac{1}{a}}, \quad x \geq 0,$$

con parámetros $a \in (0, 1)$ y $b > 0$.

- (a) [5 puntos] Determine el Valor en Riesgo y el Déficit Esperado de X al nivel de confianza $\alpha \in (0, 1)$, donde $a > 0$ y $b > 1$.
- (b) [6 puntos] Calcule el ratio asintótico del Déficit Esperado y el Valor en Riesgo,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{ES_{\alpha}(X)}{VaR_{\alpha}(X)},$$

y exponga cómo este ratio puede ser útil para determinar el capital en riesgo.

- (c) [12 puntos] Una compañía de seguros ha estado modelizando sus pérdidas anuales X debido a los riesgos operacionales por medio de una distribución lognormal con parámetros $\mu = 1$ and $\sigma^2 = 4$.

Las investigaciones de la función de gestión de riesgos han proporcionado evidencias de que esta distribución se ajusta bien en años normales, pero han expresado su preocupación de que las pérdidas extremas que pueden ocurrir en años de siniestralidad extrema puede que no sean capturadas adecuadamente por la cola de la distribución.

Una sesión de trabajo con los propietarios de los riesgos lleva a la conclusión de que los años de siniestralidad extrema se caracterizan por unas pérdidas X que exceden el umbral $u = 35.52$. De acuerdo con la distribución usada hasta ahora, la probabilidad de que un año sea de siniestralidad extrema, por ejemplo, $X > 35.52$, es $\mathbb{P}(K) = 0.1$. Los expertos coinciden en que esta probabilidad es razonable y que la pérdida medida de un año con siniestralidad extrema asciende a 100. El gestor de riesgos considera dos enfoques para incorporar los resultados de la sesión de trabajo en la distribución de X .

A) Modelizar el tamaño del siniestro por medio de la función de distribución

$$G(x) := \begin{cases} \Phi\left(\frac{\ln(x)-1}{2}\right) & ; \quad 0 \leq x \leq 35.52, \\ 0.9 + 0.1 \cdot F_{a,b}(x - 35.52); & x \geq 35.52, \end{cases}$$

donde Φ denota la función de distribución de una distribución normal estándar.

B) Modelizar el tamaño del siniestro por medio de la función de distribución

$$H(x) = 0.9 \cdot \Phi\left(\frac{\ln(x) - 1}{2}\right) + 0.1 \cdot \left(1 - \left(\frac{a_2}{a_2 + x}\right)^{b_2}\right).$$

Usted puede utilizar las relaciones siguientes sin necesidad de demostrarlas:

- Si X tiene la función de distribución $F_{a,b}$, entonces:
 - $\mathbb{P}(X > u + y \mid X > u) = F_{a,b+au}(y)$
 - $\mathbb{E}(X) = \frac{b}{1-a}$
- Para la distribución de Pareto con función de distribución $x \mapsto 1 - \left(\frac{a_2}{a_2 + x}\right)^{b_2}$, se cumple que:
 - $\mathbb{P}(X > u + y \mid X > u) = \frac{(a_2 + u)^{b_2}}{(a_2 + u + y)^{b_2}}, y \geq 0$
 - $e(u) := \mathbb{E}(X - u \mid X > u) = \frac{a_2 + u}{b_2 - 1}$

(i) [4 puntos] Explique los fundamentos de los dos enfoques A) y B).

(ii) [8 puntos]

- [4 puntos] Compare y valore los dos enfoques A) y B).
- [4 puntos] Desarrolle una propuesta de cómo implementar los dos enfoques A) y B). Indique si, para la implementación, usted necesita información adicional de los participantes en la sesión de trabajo y, si es así, cuáles son los aspectos relevantes que deben ser aclarados.

Pregunta 3. Modelos de Tipos de Interés. [22 puntos]

- (a) [9 puntos] Se asume la hipótesis de que $P(0, S) > P(0, T) \cdot \frac{1}{1+(S-T) \cdot F(0, T, S)}$ para $0 < T < S$, donde $P(0, T)$ y $F(0, T, S)$ denota, respectivamente, el precio en el momento 0 de un bono cupón cero con vencimiento en T y el tipo de interés a futuro en el momento 0 para el periodo $[T, S]$. Desarrolle una estrategia de arbitraje.
- (b) [8 puntos] Sea $F(t, T, S)$ el tipo de interés a futuro (a plazo o a término) en capitalización simple en el momento t que se aplicará desde el momento $T \geq t$ hasta $S > T$ y $L(T, S)$ tipo de interés al contado en capitalización simple en el momento T para el periodo $[T, S]$. Demuestre que

$$\mathbb{E}^S(L(T, S) \mid \mathcal{F}_u) = F(u, T, S), \quad 0 \leq u \leq t \leq T < S,$$

donde $\mathbb{E}^S$ denota la esperanza matemática bajo la S medida de probabilidad a plazo Q^S . Comente de forma razonada el resultado en el caso especial $t = T$.

- (c) [5 puntos] Explique la idea básica que subyace en la fórmula de Black 76 para un caplet. ¿En qué circunstancias esta idea puede ser implementada de forma que sea matemáticamente rigurosa? Indique las ventajas de dicha implementación frente a la fórmula clásica de Black 76.

Pregunta 4. Agregación de Riesgos y Cópulas. [30 puntos]

Considere una compañía de seguros con d líneas de negocio cuyas variables de pérdidas asociadas son $L_1, \dots, L_d$. El capital en riesgo de una línea de negocio individual se denota por $EC_1, \dots, EC_d$.

- (a) [9 puntos] Explique tres métodos para determinar el capital en riesgo global EC indicando las ventajas e inconvenientes de cada uno.
- (b) Por simplicidad a partir de ahora se consideran $d = 2$ líneas de negocio. Así-mase la hipótesis de que $L_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ y que L_2 se distribuye siguiendo una distribución log-normal con parámetros μ_2, σ_2^2 , es decir, $\ln(L_2) \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$. El equipo de gestión de riesgos ha decidido usar un enfoque de cópulas y un modelo de meta distribuciones de Gauss (por ejemplo, un modelo basado en la cópula de Gauss C_ρ^{Ga}) para la agregación de riesgos.
- (i) [3 puntos] Proporcione para un parámetro fijo ρ la función de distribución $F_{\mathbf{L}}$ de $\mathbf{L} = (L_1, L_2)'$ en el modelo de Meta distribuciones de Gauss.
- (ii) [6 puntos] Usted tiene un generador de números aleatorios a su disposición que es capaz de generar realizaciones z_1, z_2 de $N(0, 1)$ que son estocásticamente independientes entre sí. Desarrolle un algoritmo para generar una realización de $(L_1, L_2)' \sim F_{\mathbf{L}}$.
- (c) Un aspecto importante a la hora de usar el modelo de Meta distribuciones de Gauss es determinar los parámetros de la cópula ρ .
- (i) [7 puntos] Explique que estructura de dependencia se obtiene en los casos especiales en los que $\rho = 0$ y $\rho = 1$. ¿Están L_1 y L_2 perfectamente correlacionados en el caso que $\rho = 1$? Para el caso de que $\rho = 1$ determinar el Valor en Riesgo $\text{VaR}_\alpha(L_1 + L_2)$. Justifique sus respuestas.
- (ii) [5 puntos] Usted tiene a su disposición las 5 observaciones de L_1 y L_2 siguientes.

Observación	1	2	3	4	5
L_1	0.13	0.16	0.81	0.17	0.66
L_2	0.81	0.42	0.94	0.92	0.78

Calcule la τ de Kendall y un estimador para el parámetro ρ en C_ρ^{Ga} .

Pregunta 5. Riesgo de Contraparte. [20 puntos] Dos partes S y B han acordado un contrato donde el vendedor de la protección S ofrece al comprador de la protección B protección contra un evento adverso a cambio de los pagos de unas primas. Se denota V_t el valor de mercado del contrato en el momento t desde el punto de vista de B; el vencimiento se denota por T . (Ejemplos de tales acuerdos son los contratos de permuta financiera en los que subyacente es el riesgo de crédito y los contratos de seguro).

- (a) [6 puntos] Explique que se entiende por riesgo de contraparte en este contexto e indique brevemente dos de las técnicas diferentes que se utilizan para gestionar esta categoría de riesgo.
- (b) En el contexto expuesto más arriba la corrección de valor para el comprador de protección B viene dado por

$$\text{CVA} = \mathbb{E}^Q(\mathbf{1}_{\{\tau_S < T\}} e^{-r\tau_S} (V_{\tau_S})^+).$$

Donde $r \geq 0$ es el tipo de interés libre de riesgo, τ_S y δ_S es el tiempo de impago y la pérdida en caso de impago de S.

- (i) [5 puntos] Assume that δ_S is deterministic and that the market value V_t of the contract and the default time τ_S are independent. Show that under these assumptions the CVA is equal to the simpler expression

Asúmase la hipótesis de que δ_S es determinista y que el valor de mercado V_t del contrato y del tiempo de impago τ_S son estocásticamente independientes entre sí. Demuestre que bajo esas hipótesis el CVA es igual a la expresión simplificada

$$\text{CVA}^{\text{indep}} = \delta_S \int_0^T e^{-rt} E^Q(V_t^+) f_S(t) dt,$$

donde f_S denota la densidad de τ_S .

- (ii) [5 puntos] Evalúe la fórmula para el caso en el que $E^Q(V_t^+)$ es constante e igual a 100 y donde bajo Q , τ_S se distribuye siguiendo una distribución exponencial con parámetro γ_S . Se puede calibrar γ_S a partir del diferencial de un CDS negociado sobre S ?
- (iii) [4 puntos] En la obtención de la fórmula para $\text{CVA}^{\text{indep}}$ se asume la hipótesis de que V_t y el tiempo hasta el impago τ_S son estocásticamente independientes entre sí. Discuta la conveniencia de esta hipótesis en el contexto de un contrato de reaseguro.

Pregunta 6. Riesgo de Crédito de la Cartera. [25 puntos] Considere una compañía de seguros que ofrece seguro contra el impago en créditos al consumo. La cartera de seguros consiste en m contratos que ofrecen la protección contra el impago de m créditos diferentes con indicadores de impago $Y^1, \dots, Y^m$. En el caso de que el crédito i cause impago, la compañía de seguros experimenta una pérdida de tamaño e_i . A continuación se asume la hipótesis de que e_i es determinista.

El asegurador usa un modelo de distribuciones ponderadas de la familia probit-normal Bernoulli para la modelización de la distribución de probabilidad conjunta de los impagos de los m créditos (por ejemplo, con el fin de determinar el capital en riesgo). Se asume que la probabilidad de impago condicionada toma la forma

$$p_i(\psi) = \phi(\mu_i + \sigma\psi) \text{ for } \psi \sim N(0, 1), \quad 1 \leq i \leq m. \quad (1)$$

- (a) [3 puntos] Explique porqué se espera que los impagos sean dependientes y proporcione una justificación intuitiva del modelo (1).
- (b) [8 puntos] Expresé la probabilidad de impago $\bar{p}_i = P(Y^i = 1)$, la covarianza $c_{ij} = \text{cov}(Y^i, Y^j)$ y la probabilidad de que cause impago exactamente un crédito como una integral respecto de la densidad de ψ .
- (c) [6 puntos] Desarrolle un algoritmo para generar una realización de $L = \sum_{i=1}^m e_i Y^i$. Para dicho algoritmo usted tiene a su disposición un generador de números aleatorios que puede generar variables nomales y de Bernoulli.
- (d) [8 puntos] A continuación asúmase la hipótesis de que el modelo es intercambiable ($\mu_i \equiv \mu$, $e_i \equiv e$) y defina la variable de ponderación $Q = \phi(\mu + \sigma\psi)$.

Para un m suficientemente grande se cumple que

$$\text{VaR}_\alpha(L) \approx m e \text{VaR}_\alpha(Q) \quad (2)$$

Explique la obtención de esta fórmula y utilice (2) para calcular una aproximación a $\text{VaR}_\alpha(L)$. Cuál es el impacto de un σ mayor sobre $\text{VaR}_\alpha(L)$ para $\alpha > 0.5$?

Pregunta 7. Riesgo de tipo de interés y modelos de estructura temporal de tipos de interés. [30 puntos]

Se asume la hipótesis de que el tipo de interés a corto plazo $r(t)$ sigue un modelo de Vasicek con parámetros a , b y σ bajo la medida de probabilidad real $\mathbb{P}$:

$$dr(t) = a(b - r(t))dt + \sigma dW_t \quad (\text{RW})$$

Además, se asume que λ es el precio del riesgo en el mercado. En tal caso, bajo la medida de probabilidad neutral al riesgo $\mathbb{Q}$, $r(t)$ sigue el modelo de Vasicek

$$dr(t) = a(b_\lambda - r(t))dt + \sigma dW_t^{\mathbb{Q}} \quad (\text{RN})$$

donde $b_\lambda = b - \frac{\lambda\sigma}{a}$.

Pista. En el modelo de Vasicek, la esperanza matemática del factor de descuento estocástico $D(t, T)$ viene dado por:

- bajo la **medida de probabilidad real**:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(D(t, T) | \mathcal{F}_t) = \exp(-A(t, T) - B(t, T) \cdot r(t))$$

con funciones deterministas $A(t, T)$ y $B(t, T)$,

- bajo la **medida de probabilidad neutral al riesgo**:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(D(t, T) | \mathcal{F}_t) = \exp(-A_\lambda(t, T) - B_\lambda(t, T) \cdot r(t))$$

con funciones deterministas $A_\lambda(t, T)$ and $B_\lambda(t, T)$.

Además, el tipo de interés a corto plazo se distribuye siguiendo una distribución normal:

- $r(t) \sim \mathcal{N}(a(t), b(t))$ con funciones deterministas $a(t)$ y $b(t)$ bajo la **medida de probabilidad real**,
- $r(t) \sim \mathcal{N}(a_\lambda(t), b_\lambda(t))$ con funciones deterministas $a_\lambda(t)$ y $b_\lambda(t)$ bajo la **medida de probabilidad neutral al riesgo**.

- (a) [10 puntos] Con el fin de cubrir la obligación de pagar la cantidad S en el momento 2, una compañía invierte en el valor de mercado de la obligación en un bono cupón cero con vencimiento 1. Determinar la cantidad de capital en riesgo en el momento 0 que se necesita con el fin de asegurar que el valor de mercado de la obligación en el momento 1 puede ser cubierto con una probabilidad del 0.95

(b) [20 puntos] Considere una cartera de N personas aseguradas de la misma edad que suscriben un seguro de capital diferido a prima única que paga la suma S en el momento 2. Sea p la probabilidad de supervivencia hasta el momento 2. Asuma la hipótesis de que los tantos de interés y de mortalidad son estocásticamente independientes entre sí.

(i) [2 puntos] Indique el valor actual estocástico $PV(0)$ de las obligaciones del seguro en el momento 0 como función de número aleatorio de supervivientes y de la evolución aleatoria del tipo de interés a corto plazo.

(ii) [3 puntos] Determine el valor esperado de $PV(0)$ bajo las medidas de probabilidad real y riesgo neutral. ¿Cuál de esas cantidades es el valor de mercado M de los compromisos?

(iii) [10 puntos] Determine la varianza del $PV(0)$ bajo la medida de probabilidad real. Analice el comportamiento asintótico $\lim_{N \rightarrow \infty} \text{Var}\left(\frac{PV(0)}{N}\right)$ y explique el resultado desde un punto de vista económico.

Pista. Para dos variables aleatorias cuyo cuadrado es integrable, es decir, sus momentos de segundo orden son finitos, se cumple que

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(\text{Var}(X|Y)) + \text{Var}(\mathbb{E}(X|Y)).$$

(iv) [5 puntos] La compañía de seguros invierte el valor de mercado de los compromisos M en una cuenta bancaria que se asume evoluciona de acuerdo con el modelo de Vasicek. Desarrolle una estrategia para reducir el riesgo de tipo de interés. Empleando argumentos cualitativos, indique si el riesgo de tipo de interés puede ser eliminado completamente o no.