

Examen escrito CERA módulo A

Métodos cuantitativos de ERM

de conformidad con el reglamento de examen nº 2.1 de
Deutschen Aktuarvereinigung e. V.
para la adquisición del título CERA

24 de mayo de 2024

Tenga en cuenta lo siguiente:

Se permite el uso de una calculadora de bolsillo.

La puntuación máxima es de 180 puntos. Se aprueba el examen si la puntuación total es de al menos 90 puntos.

Compruebe que las hojas del examen estén completas. El examen consta de 12 páginas.

Todas las respuestas deberán estar justificadas. Para las tareas computacionales se requiere proporcionar el planteamiento de la solución.

Por favor, introduzca sus respuestas sólo en las hojas designadas.

Miembros del tribunal de examen:

Prof. Dr. R. Frey, Prof. Dr. J. Wolf

Pregunta 1. Medidas de riesgo y estructuras de dependencia [29 puntos]

Supongamos que las variables de pérdida X_1 y X_2 son comonotónicas. Sus funciones de distribución acumulativa F_1 y F_2 vienen dadas por:

$$F_1(x_1) = \begin{cases} 0 & ; x_1 < 0 \\ 0.8 & ; 0 \leq x_1 < 3 \\ 1 - \frac{1}{x_1^2} & ; x_1 \geq 3, \end{cases}$$
$$F_2(x_2) = \begin{cases} 0 & ; x_2 < 1, \\ 1 - \frac{1}{x_2^4} & ; x_2 \geq 1. \end{cases}$$

- a) [9 puntos] Calcule el valor en riesgo (VaR), el valor en riesgo de cola (TVaR) y el déficit esperado (ES) de X_1 con un nivel de confianza de 0,85.
- b) [9 puntos] Defina comonotonicidad y dé una interpretación económica. Represente $X_1 = V_1(U)$ y $X_2 = V_2(U)$ como una función de una variable aleatoria U uniformemente distribuida en $[0,1]$.
- c) [3 puntos] Determine el valor en riesgo (VaR) de $X_1 + X_2$ con un nivel de confianza de 0,9 utilizando las representaciones de la parte b).
- d) [8 puntos] Suponga que le dan un generador de números aleatorios para la distribución uniforme en $[0,1]$. Utilizando las representaciones de la parte b), desarrolle un algoritmo que determine de forma aproximada el déficit esperado de $X_1 + X_2$ con un nivel de confianza de 0,99 y la probabilidad de déficit de $X_1 + X_2$ para el umbral 3 mediante 10000 simulaciones.

Pregunta 2. Medidas de riesgo y axiomática. [14 puntos]

Supongamos que la variable de pérdida X tiene una distribución de Pareto con parámetros b, c , es decir, su función de distribución acumulativa viene dada por

$$F(x) = 1 - \left(\frac{c}{c+x} \right)^b, \quad b > 2, c > 0, \quad x \geq 0.$$

- (a) [4 puntos] Compruebe que el estimador del $VaR_\alpha(X)$ basado en los estimadores de momentos $\hat{b}, \hat{c}$ de los parámetros viene dado por

$$T_1(\hat{b}, \hat{c}) = \hat{c}(1 - \alpha)^{-\frac{1}{\hat{b}}} - \hat{c}.$$

- (b) [2 puntos] Enuncie el estimador cuantílico empírico T_2 para el $VaR_\alpha(X)$.
- (c) [8 puntos] Describa cómo comparar los dos estimadores de las partes a) y b) utilizando una función de puntuación en backtesting.

Pregunta 3. Teoría del Valor Extremo (EVT) y Medidas de Riesgo. [20 puntos]

- (a) [10 puntos] En la Figura 1 se muestran datos de siniestros simulados (4000 puntos de datos) y el correspondiente gráfico de exceso medio. Discuta cómo puede utilizarse el método de picos sobre umbral (POT) para estimar la cola de la distribución de los datos de siniestralidad. Qué valor esperaría para el valor estimado del parámetro ξ : $\xi \approx 0$; $0 < \xi < 1$; $\xi \approx 1$. Justifica brevemente tu elección.

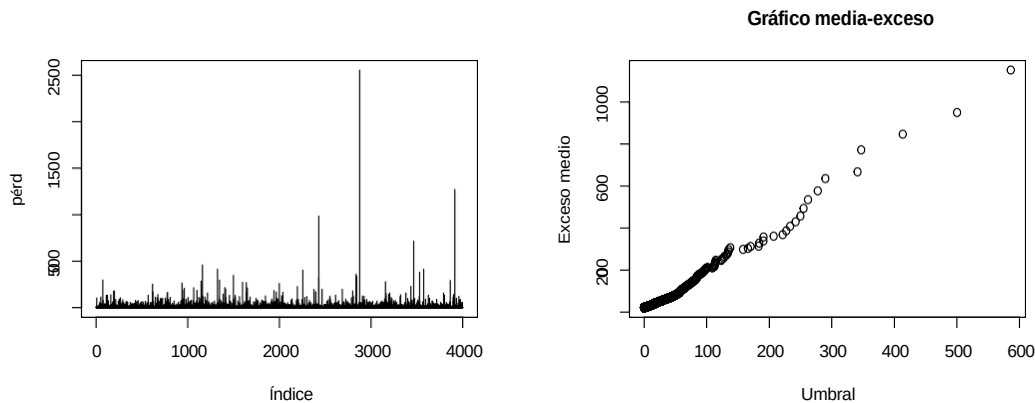


Gráfico 1: Izquierda: datos de pérdidas; derecha: gráfico de exceso medio correspondiente.

- (b) [10 puntos] Consideremos una variable aleatoria X que tiene una distribución de Pareto con función de distribución

$$F(x) = 1 - \frac{b^a}{(b+x)^a}.$$

- (i) [4 puntos] Demuestre que la función de supervivencia de X decae polinómicamente con el parámetro $\xi = \frac{1}{a}$
- (ii) [6 puntos] Utilice los resultados generales de la EVT para determinar la relación asintótica $\lim_{\alpha \rightarrow 1} \frac{ES_{\alpha}(X)}{VaR_{\alpha}(X)}$. Calcule esta relación asintótica para los casos especiales $a = 11$, $a = 1,1$ y utilice el resultado para discutir los pros y los contras del VaR y el ES para medir el riesgo de pérdidas de cola pesada.

Pregunta 4. Medidas de riesgo y asignación de capital. [17 puntos]

Consideremos una compañía de seguros con d unidades de negocio y siniestros asociados dados por las variables aleatorias $L_i, 1 \leq i \leq d$.

La pérdida de toda la empresa es, por tanto, $L := \sum_{i=1}^d L_i$.

Considérese una medida de riesgo ϱ invariante de la traslación y homogénea positiva, como VaR_α o ES_α y denotemos por $\varrho(L)$ el capital de riesgo para toda la empresa. En este contexto, un principio de asignación de capital asigna el capital económico $AC_1, \dots, AC_d$ a cada una de las unidades de negocio.

- (a) [8 puntos] ¿Por qué la *compatibilidad RORAC* y la existencia de un *beneficio de diversificación* son propiedades económicas razonables del principio de asignación de capital de Euler? Discuta ambos puntos.
- (b) [9 puntos] Suponga que $(L_1, \dots, L_d)$ son normales multivariantes con media $\mu=0$ y matriz de covarianzas Σ . Demuestre que en este caso las asignaciones de capital de Euler para ϱ vienen dadas por la expresión

$$AC_i = \frac{\text{cov}(L_i, L)}{\sqrt{\text{var}(L)}} \varrho(\tilde{X}),$$

donde $\varrho(\tilde{X})$ denota la medida de riesgo para una variable aleatoria $\tilde{X} \sim N(0, 1)$

Pregunta 5. Cópulas y riesgo de crédito [15 puntos]

Supongamos que un análisis de los datos del mercado muestra que la distribución de los tiempos de incumplimiento τ_1, τ_2 de dos empresas se distribuye exponencialmente con el parámetro $\lambda_i > 0, i = 1, 2$, es decir, $P(\tau_i > t) = e^{-\lambda_i t}, t \geq 0$. Para modelizar la distribución conjunta suponemos que el vector aleatorio (τ_1, τ_2) tiene una cópula de Gauss C_p^{Ga} con parámetros $\rho \in (0, 1]$.

- (a) [7 puntos] Suponga que dispone de un generador de números aleatorios capaz de generar $N(0,1)$ variables aleatorias distribuidas. Desarrolle un algoritmo para generar una realización de (τ_1, τ_2) .

- (b) [8 puntos]

Consideremos un horizonte temporal corto T y supongamos que $\lambda_1 = \lambda_2$.

- i) (5 puntos) ¿Cuál es el impacto cualitativo de un aumento de ρ en la probabilidad $P((\tau_1 \leq T) \cap (\tau_2 \leq T))$ (el caso en que ambas empresas incumplen antes de momento T)? ¿Afecta también un cambio en ρ a la probabilidad $P(\tau_1 \leq T)$? Justifica tus respuestas.
- ii) (3 puntos) Calcula $P(\tau_1 \leq T) \cap (\tau_1 \leq T)$ para el caso en que $\rho = 1$.

Pregunta 6. Opción de caducidad y riesgo de tipo de interés en el seguro de vida [30 puntos]

Sea $P(t, T)$ el precio de un bono cero sin impago con nominal 1 y vencimiento T en el momento t . Además, sea r_G el tipo de interés garantizado que puede obtenerse invirtiendo en el bono cero sin impago con vencimiento 2, es decir, supongamos que $P(0, 2) = (1 + r_G)^{-2}$.

- (a) [16 puntos] Considere la siguiente oportunidad de inversión en el momento 0: Un bono rescatable libre de impago con vencimiento 2 paga regularmente 1 unidad monetaria en el momento 2 y, además, concede al inversor el derecho a rescatar el bono en el momento 1. Si el inversor opta por ejercer este derecho, entonces el valor de rescate de $K := (1 + r_G)^{-1}$ se paga en el momento 1 en lugar del pago regular de 1 en el momento 2.

- (i) [8 puntos] En caso de ejercicio de la opción de rescate, un inversor racional decide reinvertir el valor de rescate en un bono cero sin impago con una duración de 1. Explique por qué esta estrategia conduce a un flujo de caja consistente en el pago de una prima. Explique por qué esta estrategia conduce al flujo de caja consistente en el pago

$$C_1 = (1 + r_G)^{-1} \cdot P(1, 2) \cdot 1_{\{(1 + r_G)^{-1} > P(1, 2)\}}$$

en el momento 1 y el pago $C_2 = 1$ en el momento 2. Explique el efecto de esta estrategia de inversión en comparación con la inversión en un bono cero libre de impago con vencimiento en el momento 2 sin opción de rescate.

- (ii) [8 puntos] Determine el valor del bono amortizable en el momento 0 por replicación. La cartera de réplica puede estar formada por bonos cero, opciones sobre bonos cero y swaptions.
- (b) [10 puntos] Considere una póliza dotal pura con opción de rescate para una persona de edad x - que da lugar a los siguientes pagos C_i que vencen en el momento i :

$$\begin{aligned} C_1 &= K \cdot 1_{\{K > P(1, 2)\}} \cdot 1_{\{S \geq 1\}}, \\ C_2 &= 1_{\{K \leq P(1, 2)\}} \cdot 1_{\{S \geq 2\}}, \end{aligned}$$

donde K denota el valor de rescate y S el tiempo de vida restante del asegurado. Fijamos ${}_1p_x = \mathbb{P}(S \geq 1)$ y ${}_2p_x = \mathbb{P}(S \geq 2)$. Sea Q la medida neutral al riesgo y $r(t)$ el tipo a corto plazo.

- (i) [4 puntos] Demuestre que se cumple la siguiente igualdad:

$$E_Q \left(1_{\{K \leq P(1,2)\}} \cdot \exp \left(- \int_0^2 r(s) ds \right) \right) = E_Q \left(P(1,2) \cdot 1_{\{K \leq P(1,2)\}} \cdot \exp \left(- \int_0^1 r(s) ds \right) \right)$$

- (ii) [6 puntos] Determine el valor de las prestaciones del seguro en el momento 0, suponiendo que el riesgo del seguro y el riesgo financiero son independientes. Represente su resultado utilizando los precios de bonos cero y opciones sobre bonos cero adecuados, así como las probabilidades de supervivencia ${}_1p_x$ y ${}_2p_x$ de que la persona asegurada sobreviva uno y dos años, respectivamente.
- (c) [4 puntos] Multiplicando los precios de los bonos cero y de las opciones sobre bonos cero utilizados en la parte a) (ii) por las probabilidades de supervivencia apropiadas y restándolas del resultado correcto en b) ii) para $K=(1+r_G)^{-1}$ se obtiene

$$({}_1p_x - {}_2p_x) \cdot E_Q \left(P(1,2) \cdot 1_{\{K > P(1,2)\}} \cdot \exp \left(- \int_0^1 r(s) ds \right) \right)$$

Analizar la interacción entre los efectos del riesgo de seguro y el riesgo de tipo de interés.

Pregunta 7. Riesgo de contraparte. [22 puntos]

Dos partes, S y B, han llegado a un acuerdo contractual por el que el vendedor de protección (*protection seller*), S, ofrece al comprador de protección (*protection buyer*), B, protección frente a algún evento adverso a cambio del pago de una prima. Indiquemos que V_t es el valor de mercado del contrato en el momento t desde el punto de vista de B; el vencimiento se indica por T . (Ejemplos de este tipo de acuerdos son las permutas de cobertura por impago y los contratos de reaseguro).

- (a) [6 puntos] Explique qué se entiende por riesgo de contraparte en este contexto y describa brevemente dos técnicas diferentes para gestionar esta categoría de riesgo.
- (b) [16 puntos] En el contexto anterior, la corrección valorativa para el comprador de protección B viene dada por

$$CVA = \delta_S E^Q(1_{\{\tau_S < T\}} e^{-r\tau_S} (V_{\tau_S})^+).$$

Aquí $r \geq 0$ es el tipo de interés sin riesgo, τ_S y δ_S son el tiempo de impago y la pérdida en caso de impago de S.

- (i) [5 puntos] Suponga que δ_S es determinista y que el valor de mercado V_t del contrato y el tiempo de incumplimiento τ_S son independientes. Demuestre que bajo estos supuestos el CVA es igual a la expresión más simple

$$CVA^{\text{indep}} = \delta_S \int_0^T e^{-rt} E^Q(V_t^+) f_S(t) dt,$$

donde f_S representa la densidad de τ_S .

- (ii) [6 puntos] Evalúe la fórmula para el caso en el que $E^Q(V_t^+)$ es constante e igual a 100 y en el que bajo Q , τ_S tiene una distribución exponencial con parámetro γ_S . ¿Puede calibrarse γ_S a partir del diferencial de un CDS negociado sobre S?
- (iii) [5 puntos] En la derivación de la fórmula para el CVA^{indep} se asume que V_t y el tiempo de incumplimiento τ_S son independientes. Discuta la idoneidad de este supuesto en el contexto de un contrato de reaseguro.

Pregunta 8. Riesgo de Crédito de Cartera. [16 puntos]

Consideremos una compañía de seguros que ofrece seguros contra impagos de créditos al consumo. La cartera de seguros consta de m contratos que ofrecen protección frente al impago de m créditos diferentes con indicadores de impago $Y^1, \dots, Y^m$. En caso de impago del crédito i ($Y^i=1$), la compañía de seguros sufre una pérdida del tamaño de e_i . En lo sucesivo supondremos que e_i es determinista.

La aseguradora utiliza un modelo de mezcla probit-normal Bernoulli para modelizar la distribución conjunta de los impagos de los m créditos (por ejemplo, a efectos de capital riesgo). Suponemos que la probabilidad condicional de impago adopta la forma

$$p_i(\psi) = \Phi(\mu_i + \sigma\psi) \text{ para } \psi \sim N(0, 1), 1 \leq i \leq m, \quad (1)$$

donde Φ es la función de distribución normal estándar.

- (a) [4 puntos] Explique por qué se espera que los valores por defecto sean dependientes y dé una motivación intuitiva para el modelo (1).
- (b) [5 puntos] Exprese la probabilidad de impago $\bar{p}_i = P(Y^i=1)$, y la probabilidad de que impague exactamente un crédito como una integral con respecto a la densidad de ψ .
- (c) [7 puntos] Supongamos en la secuela que el modelo es intercambiable ($\mu_i \equiv \mu$, $e_i \equiv e$) y definir la variable de mezcla $Q = \Phi(\mu + \sigma\psi)$. Para m grandes se cumple que

$$\text{VaR}_\alpha(L) \approx m e \text{VaR}_\alpha(Q). \quad (2)$$

Explique la derivación de esta fórmula y utilice (2) para calcular una aproximación para $\text{VaR}_\alpha(L)$. ¿Cuál es el impacto de una σ mayor en $\text{VaR}_\alpha(L)$ para $\alpha > 0,5$?

Pregunta 9. Riesgo de tipo de interés y gestión del riesgo de tipo de interés
[17 puntos]

Una sociedad de gestión de activos gestiona la cartera de un inversor $A(t)$, $t \in [0, T]$, con el valor inicial $A(0)=P$ en el momento cero 0, de forma que la parte β se invierte en la cuenta del mercado monetario libre de impago y la parte $1-\beta$ en el índice bursátil. Supongamos que el tipo corto libre de riesgo $r(t)$ sigue un modelo Vasicek y el índice bursátil sigue un modelo Black-Scholes con el tipo de interés libre de riesgo $r(t)$, un coeficiente de deriva constante y un coeficiente de volatilidad constante.

- (a) [4 puntos] Enuncie las ecuaciones diferenciales estocásticas que describen la evolución del valor de la cartera $A(t)$ bajo la medida del mundo real $\mathbb{P}$ y la medida neutral al riesgo $\mathbb{Q}$, respectivamente.
- (b) [3 puntos] Determine la tasa de participación terminal justa γ para el inversor, de forma que el valor de mercado en el momento 0 del perfil de pago venza en el momento T ,

$$L(T) := G(T) + \gamma \cdot \max(A(T) - G(T), 0),$$

es igual a P , donde $G(T) = P \cdot (1+i)^T$ es el pago mínimo garantizado basado en el tipo de interés constante i .

Represente su resultado utilizando precios adecuados de bonos cero y opciones sobre A , véase la pista siguiente.

- (c) [2 puntos] Explique por qué $A(t)$ se distribuye lognormalmente bajo $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$.
- (d) [5 puntos] La sociedad de gestión de activos utiliza la medida de riesgo VaR_α para dirigir sus actividades comerciales. Determine el capital de riesgo necesario para asegurar el pago mínimo garantizado sobre la base de un tipo de interés constante i . Exponga su resultado utilizando los parámetros μ_T, σ_T^2 de la distribución lognormal de $A(T)$. ¿Cuál es la tasa más alta de coste de capital que la sociedad de gestión de activos podría permitirse pagar por el capital riesgo suponiendo que no se aplican comisiones de gestión ni de transacción?
- (e) [3 puntos] ¿Es posible eliminar completamente el riesgo de tipo de interés comprando swaps receptores en el momento 0? Razone su respuesta.

Sugerencia. En el momento 0, el valor de una opción de compra europea sobre A con strike K y vencimiento

T viene dado en el modelo Black-Scholes con tipo de interés estocástico por

$$C_A(0, K, T) = A(0) \cdot \Phi(d_1(0, K, T)) - K \cdot P(0, T) \cdot \Phi(d_2(0, K, T)),$$

donde

$$d_{1/2}(0, K, T) = \frac{\ln\left(\frac{A(0)}{K \cdot P(0, T)}\right) \pm \int_0^T \frac{v^2(s, T)}{2} ds}{\sqrt{\int_0^T v^2(s, T) ds}},$$

$$v^2(s, T) = (1-\beta)^2 \sigma_s^2 + 2 \frac{\theta(1-\beta)\sigma_s \sigma_r}{\alpha} (1 - \exp(-\alpha(T-s))) + \frac{\sigma_r^2}{\alpha^2} (1 - \exp(-\alpha(T-s)))^2$$

y $P(0, T) = \exp(-A(0, T) - B(0, T) \cdot r(0))$ con

$$\begin{aligned} A(0, T) &= \left(b_0 - \frac{\sigma_r^2}{2a^2}\right)(T - B(0, T)) + \frac{\sigma_r^2}{4a} B(0, T)^2, \\ B(0, T) &= \frac{1}{a}(1 - \exp(-aT)). \end{aligned}$$

es el precio del bono cero con vencimiento T en el momento 0 en el modelo Vasicek.